PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 5

ÁLGEBRA

Juegos y regularidades algebraicas

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN

Valentín Cruz Oliva, ILCE

Enrique Vega Ramírez, UPN

Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

ILCE

BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 5

ÁLGEBRA

Juegos y regularidades algebraicas

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Álgebra

Módulo 5: Juegos y regularidades algebraicas

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-177-2 módulo 5

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

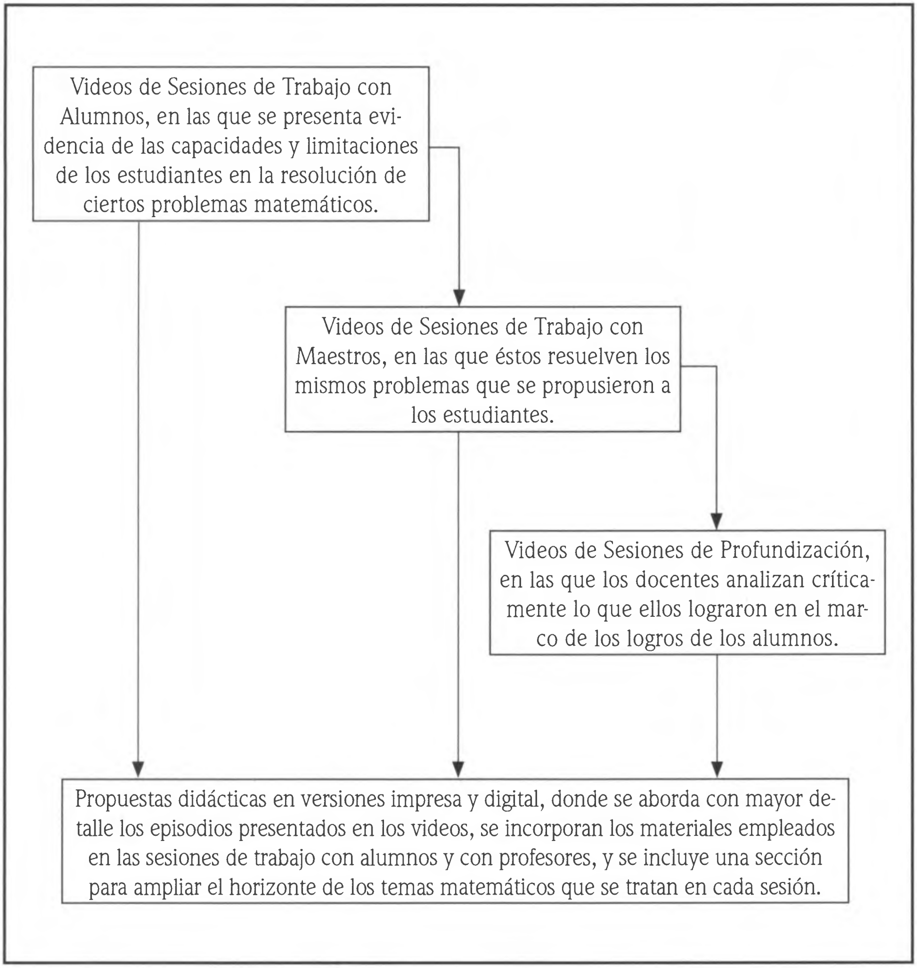
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término “sesiones de trabajo”, en lugar de “clase modelo”, para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste “entrega” sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para “recibirlos”. Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son “recipientes que esperan ser llenados”, y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education*, 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

El álgebra es un tema central en la enseñanza de las matemáticas; los alumnos tienen su primer encuentro formal con ella después de que han abordado diversos temas de aritmética que se espera sirvan de base para abordar su estudio. Las diferencias entre el lenguaje aritmético y el algebraico parecen ser una de las causas que dificultan el aprendizaje del álgebra. Sin embargo, la forma de tratar su enseñanza también está en el centro de las dificultades de su aprendizaje.

La experiencia ha permitido observar que la mayoría de los cursos introductorios de álgebra ponen mucho énfasis en las actividades destinadas al dominio de los algoritmos, dejando muy poco espacio para aquellas que promueven la búsqueda e investigación. Aun cuando existen otros tipos de actividades, el álgebra escolar mantiene su énfasis en que los alumnos adquieran destreza para realizar operaciones con expresiones algebraicas, efectuar descomposiciones en factores, productos notables, resolver ecuaciones de primero y segundo grados y sistemas de ecuaciones. Esto se resume esencialmente en practicar procedimientos enseñados por el maestro, y ha dado origen a tener una visión del álgebra como herramienta operativa exclusivamente y casi nada como herramienta de exploración y aplicación. Las habilidades definidas como matemáticas se concentran prácticamente en la manipulación simbólica; por ello, resulta difícil al alumno apreciar el potencial de generalización que posee el código algebraico.

Sin embargo, Cedillo (2001) reporta que mediante la utilización de una calculadora graficadora y actividades de enseñanza especialmente diseñadas para la utilización de esa herramienta, se introdujo a alumnos de 11 a 12 años de edad al uso del lenguaje algebraico para modelar y resolver problemas. Los resultados que Cedillo obtuvo permiten ver que un acercamiento de este tipo, distinto al de percibir al álgebra como una lista de reglas de manipulación, ayuda a los alumnos a concebir el álgebra como un instrumento para expresar generalizaciones, además de introducirlos en el estudio de las reglas que rigen la manipulación algebraica.

A este respecto, Kieran (2003, p. 122-123) distingue tres tipos de actividades en el álgebra escolar. El primer tipo es la *actividad generativa,* que involucra la formación de las expresiones y ecuaciones que son los objetos del álgebra. Ejemplos típicos de esta actividad son las ecuaciones con una incógnita que representan situaciones de problemas cuantitativos y la producción de expresiones algebraicas que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas. Mucho del significado inicial del álgebra está situado en estas actividades. El segundo tipo de actividad, *la transformacional,* está basado en el dominio de las reglas de transformación algebraica; por ejemplo, la reducción de términos semejantes, la descomposición en factores, el desarrollo de expresiones, la sustitución, la solución de ecuaciones, la simplificación de expresiones, entre otras. Por último, la actividad matemática denominada *metanivel global.* Éste es el tipo de actividad en que el álgebra se usa como una herramienta; por ejemplo, la solución de un problema, la modelación mediante funciones, el reconocimiento de estructuras, la justificación, la demostración y la predicción.

De acuerdo con la clasificación de Kieran (2003) el énfasis en la enseñanza del álgebra se ha puesto en la actividad transformacional, destinando poco o nada de atención a los otros dos tipos de actividades. Es probable que ésta sea una de las causas por la cual los alumnos dan poco sentido y aplicación a las expresiones algebraicas. El maestro pareciera obtener de su mente una serie de expresiones de las que sólo él puede justificar su aparición y una vez dominadas ciertas reglas de manipulación parece no ser posible hacer algo más con las expresiones algebraicas. Los tres tipos de actividad (generativa, transformacional y metanivel global) deben coadyuvar en forma conjunta a que los alumnos desarrollen habilidades que les permitan no sólo el trabajo operativo, sino también dar sentido al álgebra y utilizarla en diversas situaciones. Pueden considerarse entonces algunas preguntas como las siguientes: ¿De dónde debieran surgir las expresiones que el alumno debe manipular? ¿Qué sentido tiene para los alumnos efectuar transformaciones a una expresión algebraica? ¿Cómo pueden usarse dichas expresiones?

El uso de actividades de tipo generativo y de metanivel global puede contribuir a dar respuesta a estas preguntas. Las primeras se refieren al reconocimiento de patrones y a la producción de expresiones algebraicas en contextos numéricos y geométricos, lo cual parece ayudar a los alumnos en la asignación de sentido y significado a dichas expresiones. Por otra parte, mediante actividades de metanivel global los alumnos tienen la posibilidad de formular generalizaciones y proponer justificaciones algebraicas que de otra forma no parecieran tener una explicación inmediata. Debemos entonces considerar algunas ideas importantes que surgen de proponer a los alumnos actividades en las cuales deben identificar regularidades y patrones, escribir expresiones algebraicas y usar dichas expresiones. Por ejemplo, English y Warren (1998, citado en Zazkis y Liljedahl, 2002) mencionan que una primera aproximación al álgebra mediante patrones provee a los alumnos la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y registrarlas simbólicamente. Además, sugieren que actividades en las que está implicado el reconocimiento de patrones proveen una útil y concreta base para trabajar con símbolos.

El uso del término *álgebra* implica dos conceptos: pensamiento algebraico y simbolismo algebraico. Mason (1996, citado en Zazkis y Liljedahl, 2002) señala que el simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, el lenguaje que expresa la generalidad. Para Kieran (1989, p. 165; citado en Zazkis y Liljedahl, 2002), *generalización* no es equivalente a *pensamiento algebraico*, incluso la generalización no requiere necesariamente del álgebra. De acuerdo con esto, pensamiento algebraico es diferente de generalización; estos dos conceptos confluyen cuando se usa el simbolismo algebraico para razonar y expresar una generalización. Kieran (1989) agrega que para formular una caracterización del pensamiento algebraico no es suficiente con ver lo general en lo particular, sino también que el alumno debe ser hábil para expresar eso algebraicamente.

De acuerdo con lo anterior, tenemos que considerar al menos tres conceptos: generalización, pensamiento algebraico y simbolismo algebraico. Es importante entonces que los alumnos además de reconocer generalizaciones sean capaces de verbalizarlas y escribirlas mediante el lenguaje algebraico.

El módulo **Patrones numéricos y generalización** incluye actividades del tipo generacional y de metanivel global. Se pretende que con las actividades de enseñanza que ahí se proponen, los alumnos identifiquen patrones y regularidades, verbalicen las reglas que gobiernan dichos patrones y las simbolicen; todo esto a partir de planteamientos verbales y secuencias de figuras geométricas. También se aborda el uso de las expresiones algebraicas, construidas previamente por los alumnos, para justificar alguna situación dada; por ejemplo, los argumentos que ofrecen para justificar por qué después de una secuencia de operaciones es posible anticipar el resultado final.

En la primera sesión de trabajo se utiliza una actividad (Cedillo, 1999a) en la que se propone un juego matemático y en la segunda, secuencias de figuras geométricas. Mediante estas actividades se espera que los alumnos vayan introduciéndose en el estudio del álgebra. La intención es que comprendan procesos de generalización introduciendo el uso del lenguaje algebraico como un medio de representación que sirve para expresar una generalización.

JUEGOS Y REGULARIDADES ALGEBRAICAS

Objetivos

Que el alumno:

- Identifique regularidades y patrones en contextos numéricos y geométricos.
- Exprese en forma verbal y mediante el lenguaje algebraico las regularidades y patrones identificados.
- Asigne significado a las expresiones algebraicas que construyó acorde al contexto del que surgen.

Planeación de las actividades con los alumnos

Primera sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos

Inicio (2 min). El maestro saluda al grupo y explica la dinámica de la clase.

Cápsula de video (7 min). Proyección de un video que presenta a un mago haciendo un juego matemático.

Verificación del juego matemático del mago (3 min). Los alumnos realizan el juego mostrado en el video y comparan sus resultados. Observan que sus resultados coinciden con el del video. Verifican el juego utilizando diferentes números (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (5 min). El maestro propone a los alumnos descubrir la razón por la cual el mago adivina el resultado (hojas de trabajo y plumones).

Exposición del trabajo realizado (3 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las distintas soluciones (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (5 min). El maestro pide a los alumnos que encuentren una expresión algebraica para representar el juego matemático del mago (hojas de trabajo y plumones).

Exposición del trabajo realizado (3 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (5 min). El maestro solicita a los alumnos modificar el juego de manera que el resultado final sea diferente al del mago (hojas de trabajo y plumones).

Exposición del trabajo realizado (3 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (6 min). El maestro solicita a los alumnos encontrar una expresión algebraica para representar al juego con diferentes resultados (hojas de trabajo y plumones).

Exposición del trabajo realizado (3 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Conclusiones (5 min). Al final de la sesión el maestro concluye con las coincidencias, similitudes y otras posibles situaciones del juego matemático (pizarrón y marcadores).

Segunda sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos

Inicio (2 min). El maestro saluda al grupo y explica la dinámica de la clase.

Primera secuencia de figuras geométricas (3 min). El maestro muestra una secuencia de figuras geométricas formada con cubos de madera (cubos de madera).

Trabajo en equipo (12 min). Los alumnos responden una serie de preguntas relacionadas con las figuras (hojas de trabajo, plumones y cubos de madera).

Exposición del trabajo realizado (8 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Segunda secuencia de figuras geométricas (3 min). El maestro muestra una nueva secuencia de figuras geométricas construida con cubos de madera (cubos de madera).

Trabajo en equipo (14 min). Los alumnos responden una serie de preguntas relacionadas con las figuras (hojas de trabajo, plumones y cubos de madera).
Exposición del trabajo realizado (8 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Descripción de las actividades

Primera sesión

Cápsula de video

Los alumnos observan un video en donde el personaje principal, un mago, realiza el siguiente juego matemático:

> Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10, a ese número súmale 10 y anota el resultado. Ahora réstale a 10 el número que pensaste y anota el resultado. Suma los dos resultados que anotaste. ¿Qué resultado final obtuviste?

Verificación del juego matemático del mago

El maestro pide a los alumnos que lleven a cabo el juego y comparen sus resultados con el presentado en el video.

Los alumnos verifican el resultado utilizando diferentes cantidades, como los dos ejemplos que se muestran a continuación.

Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10.	7
A ese número súmale 10 y anota el resultado.	$7 + 10 = 17$
Ahora réstale a 10 el número que pensaste y anota el resultado.	$10 - 7 = 3$
Suma los dos resultados que anotaste.	$17 + 3 = 20$

Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10.	4
A ese número súmale 10 y anota el resultado.	$4 + 10 = 14$
Ahora réstale a 10 el número que pensaste y anota el resultado.	$10 - 4 = 6$
Suma los dos resultados que anotaste.	$14 + 6 = 20$

Trabajo en equipo

El maestro pide a los alumnos que respondan el primer inciso de la hoja de trabajo entregada.

1. Descubran la razón por la que el mago puede adivinar el resultado.

Los alumnos abordan esta actividad en equipos de trabajo.

Exposición del trabajo realizado

Una vez que los alumnos tuvieron tiempo para encontrar una justificación, se realiza la exposición de las soluciones y se confrontan.

Trabajo en equipo

Los alumnos contestan el segundo inciso de la hoja de trabajo.

2. Escriban una fórmula que represente el juego del mago.

Una posible expresión algebraica para representar el juego es

$$b + 10 + 10 - b,$$

en donde b es el número que se piensa entre 1 y 10.

Después de una serie de transformaciones es posible reducir la expresión y obtener de resultado 20:

$$b + 10 + 10 - b = b - b + 10 + 10 = 0 + 20 = 20.$$

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen y explican al grupo la expresión algebraica escrita para el juego del mago.

Trabajo en equipo

El maestro solicita a los alumnos responder el tercer inciso de la hoja de trabajo.

3. Modifiquen la fórmula para que el resultado final sea distinto de 20.

Por ejemplo:

Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10.	6
A ese número súmale 20 y anota el resultado.	$6 + 20 = 26$
Ahora réstale a 20 el número que pensaste y anota el resultado.	$20 - 6 = 14$
Suma los dos resultados que anotaste.	$26 + 14 = 40$

Piensa en un número entero que esté entre 1 y 18.	11
A ese número súmale 36 y anota el resultado.	$11 + 36 = 47$
Ahora réstale a 36 el número que pensaste y anota el resultado.	$36 - 11= 25$
Suma los dos resultados que anotaste.	$47 + 25 = 72$

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen ante el grupo cómo es que modificaron el juego matemático considerando diferentes resultados.

Trabajo en equipo

Los alumnos realizan la actividad 4 de la *Hoja de trabajo.*

4. Escriban una fórmula que considere diferentes resultados al final.

La siguiente expresión puede ser una posible respuesta: $x + y + y - x$, en donde x es el número que se piensa y y es la cantidad a la cual se le suma y sustrae el número pensado.

Al efectuar ciertas transformaciones en la expresión, podemos anticipar el resultado del juego: $x + y + y - x = 0 + 2y = 2y$, esto es, dos veces la cantidad que se suma y resta.

Exposición del trabajo realizado

Una vez que los alumnos tienen tiempo para abordar la actividad muestran y explican al grupo las expresiones escritas.

Conclusiones

Al final de la sesión el maestro determina las conclusiones con el grupo.

Segunda sesión

Primera secuencia de figuras geométricas

El maestro muestra una secuencia de figuras geométricas con cubos de madera como se indica en la figura 1.

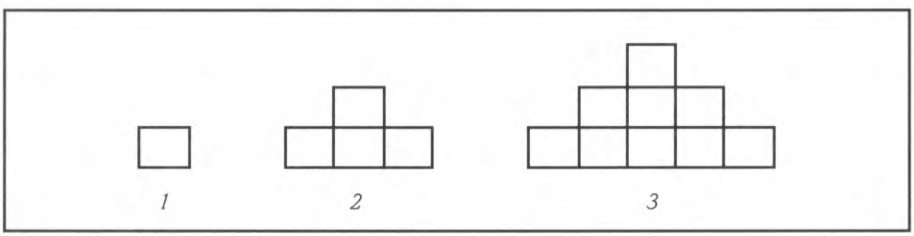


Figura 1

Trabajo en equipo

Los alumnos realizan las siguientes actividades, de la hoja de trabajo entregada, relacionadas con la secuencia de figuras geométricas.

1. Reproduzcan las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. ¿Cuántos cubos necesitaron para reproducir cada figura?
3. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
4. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?
5. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
6. Completen la siguiente tabla.

Número de figura	Total de cuadros en la figura
7	
9	
	225
29	
53	

7. Expliquen cómo encontraron el número de la figura cuando ésta tiene en total 225 cuadros.
8. Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen la forma en que realizan las actividades anteriores y comparan sus respuestas con los demás compañeros.

Segunda secuencia de figuras geométricas

El maestro muestra la siguiente secuencia de figuras geométricas, como se indica en la figura 2, con cubos de madera.

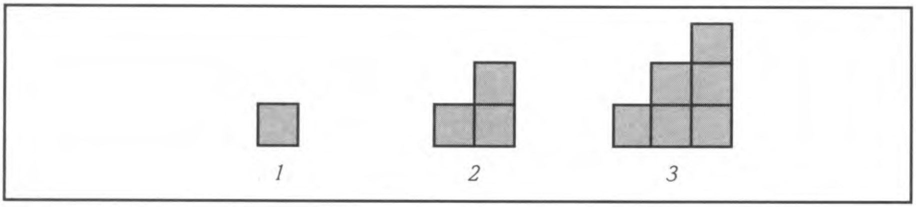


Figura 2

Trabajo en equipo

Los alumnos responden una serie de preguntas, incluidas en la hoja de trabajo entregada, relacionadas con la secuencia geométrica.

1. Reproduzcan las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. ¿Cuántos cubos necesitaron para reproducir cada figura?
3. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
4. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?
5. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
6. Completen la siguiente tabla.

Número de la figura	7	8			1 000
Total de cuadros en la figura			66	325	

7. Expliquen cómo determinaron el número de la figura cuando ésta tiene en total 325 cuadros.
8. Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen la forma en que resuelven los incisos del apartado anterior y comparan sus respuestas con las de sus demás compañeros.

Respuestas esperadas

Primera sesión de trabajo

Algunas de las respuestas dadas por los alumnos cuando verificaron el juego matemático y descubrieron por qué el mago podía adivinar el resultado se ilustran a continuación.

Un alumno escribió las siguientes operaciones para verificar el juego matemático con el número 2 (que corresponde al número pensado): $2 + 10 = 12$, $10 - 2 = 8$, y $12 + 8 = 20$. Una vez hecha la verificación, agregó: "Lo que falta para 20 lo hayas en la diferencia".

Otra explicación fue:

> Al sumar una cantidad variable entre 1 y 10 a la constante 10, te da una determinada cantidad, y al restarle a 10 esta variable te da la diferencia entre el resultado de la primera cantidad y el 20.

Estas frases trataron de justificar por qué el resultado siempre era 20. En ellas, los alumnos consideraban que una vez obtenido el resultado de la primera operación (la suma: $2 + 10 = 12$) y la segunda (la sustracción: $10 - 2 = 8$), obtenían las cantidades necesarias para completar siempre 20.

Los alumnos también mencionaron lo siguiente: "Está jugando (refiriéndose al mago) con los números". Vincularon esta última frase con las operaciones involucradas en el juego, es decir, a través de dichas operaciones el mago "juega con los números".

Una respuesta más fue la siguiente:

> El mago puede adivinar la respuesta porque a la constante, que es el número 10, le sumas y le restas el mismo número, entonces, la constante se repite dos veces.

Esta repuesta consideraba el hecho de anular el número pensado al efectuar las operaciones inversas con él, prevaleciendo entonces dos veces la cantidad a la que llamaban constante, 10. Hasta este momento de la clase los alumnos habían comprendido el juego matemático y eran capaces de explicar por qué el mago adivinaba el resultado final.

Después se observó si los alumnos eran capaces de escribir en lenguaje algebraico lo que hasta el momento habían logrado verbalizar y ejemplificar. Un alumno pasó al pizarrón y escribió las siguientes expresiones que representaban el juego del mago:

$$Z + 10 = X$$
$$10 - Z = A$$
$$X + A = 20$$

En esta expresión, Z representa al número que se pensaba, mientras X y A, los resultados de la adición y sustracción respectivamente. Esto muestra que los alumnos podían traducir al lenguaje algebraico el juego del mago y daban significado a las literales utilizadas en las expresiones escritas.

En la extensión del juego matemático un alumno escribió la expresión $(x + 14) + (14 - x) = 28$ y añadió: "x es el número que pensamos". Esta expresión modificaba el resultado final de 20 a 28, y utilizaba 14 como cantidad constante (así le llamaban los alumnos). Esta expresión fue la primera escrita en una sola línea y utilizaba los paréntesis para agrupar las operaciones indicadas en el juego del mago. El maestro preguntó a los alumnos qué debían modificar en la expresión $(x + 14) + (14 - x) = 28$ para obtener 72 como resultado; respondieron: "Cambiar 14 por 36 para que me dé 72". Los alumnos fueron capaces de representar algebraicamente el juego y modificar el resultado final, dando sentido a la literal utilizada.

La última actividad de la sesión consistió en escribir una expresión algebraica en la que el resultado final fuera cualquier cantidad. Las expresiones escritas por los alumnos fueron las siguientes:

$$A + X = B,$$
$$X - A = C,$$
$$C + B = X + X.$$

El alumno que escribió las expresiones, anotó un ejemplo, en donde $A = 5$ y $X = 30$:

$$5 + 30 = 35,$$
$$30 - 5 = 25,$$
$$25 + 35 = 30 + 30 = 60.$$

Otra expresión escrita en una sola línea fue $(d + x) + (x - d) = F$. En esta expresión la variable 1 (v_1) era d, la variable 2 (v_2) era x y la variable v_3 fue F. Las últimas dos expresiones utilizaban cuatro y tres variables, por lo cual se pidió a los alumnos rescribir la expresión algebraica usando sólo dos variables, para lo cual identificaron que una de las variables podía ser escrita en función de otra: "La variable F siempre va a ser el doble de la variable 2 (la cual es x)". La nueva expresión consideraba sólo dos variables: $(d + x) + (x - d) = x*2$.

El maestro invitó a los alumnos a pensar en la posibilidad de cancelar los paréntesis de la última expresión escrita; sin embargo, esta transformación de la expresión no fue inmediata y los alumnos consideraron que podía afectar el resultado. Un alumno comentó que él había hecho las operaciones sin considerar los paréntesis y había obtenido el resultado esperado; para ello asignó a d el valor de 5 y a x el valor de 10, obteniendo como resultado el doble de x:

$$5 + 10 + 10 - 5 = 10*2.$$

Al final de la sesión, los alumnos escribieron expresiones algebraicas relacionadas con el juego matemático del mago y habían dado sentido a las literales utilizadas. Todas las expresiones algebraicas escritas en esta primera sesión fueron generadas por los propios alumnos.

Segunda sesión de trabajo

Primera secuencia de figuras

Los alumnos no tuvieron dificultades para determinar el número de cubos necesarios para reproducir las cinco primeras figuras de la secuencia geométrica mostrada en la figura 1, ya que podían contar directamente los cubos. Sin embargo, cuando requirieron conocer el número de cubos para un número de figura del que no conocían el comportamiento de la anterior, acudieron entre otras estrategias a elaborar una tabla como la siguiente.

Número de la figura	Número de cubos	Cantidad a sumar
1	1	+3
2	4	+5
3	9	+7
4	16	+9
5	25	+11
6	36	

En esta tabla, la primera columna corresponde al número de la figura, la segunda al total de cubos en la figura, y la tercera es la cantidad que los alumnos sumaban al total de cubos de una figura para conocer los cubos de la figura siguiente, por ejemplo: como la figura 3 requiere de nueve cubos, sumaban 7 unidades al 9 para determinar el total de cubos de la figura 4, en este caso 16. Varios alumnos usaron este procedimiento para determinar el total de cubos de una figura. En la siguiente tabla se ilustra parte del proceso para determinar el total de cubos de la figura 10.

Número de figura	Número de cubos	Cantidad a sumar
8	64	
		+17
9	81	
		+19
10	100	

Otros alumnos identificaron una relación entre la primera y la segunda columna de la tabla anterior y mencionaron: "Se multiplica el número de la figura en ella misma". Una vez reconocida esta relación, los alumnos no tuvieron dificultades para completar la siguiente tabla.

Número de figura	Total de cuadros en la figura
7	
9	
	225
29	
53	

Para determinar el número de la figura a partir del total de cuadros, los alumnos calcularon la raíz cuadrada del total de cuadros de la figura; por ejemplo, siendo 15 la raíz cuadrada de 225, la figura que tenía 225 cuadros es la 15. Por último, los alumnos escribieron una expresión algebraica que representa la relación identificada, la cual es $A^2 = B$, en donde A era el número de la figura y B el total de cuadros de la figura.

Segunda secuencia de figuras

Para la secuencia geométrica de la figura 2, los alumnos determinaron el número de cubos para reproducir las primeras cinco figuras sin problemas; sin embargo, cuando se trató de un número de figura mayor, usaron otras estrategias. Una de las estrategias fue la misma que emplearon para la secuencia de la figura 1, la cual se muestra en la siguiente tabla.

No. de figura	No. de cubos	Cantidad a sumar
6	21	+7
7	28	

La tercera columna de la tabla es la cantidad que se debe sumar al total de cubos de una figura para determinar el total de cubos de la siguiente. En este caso, si la figura 6 tiene 21 cuadros, deben sumarse siete y 21 para encontrar el total de cubos de la figura 7, que es 28. Un alumno describió este método con la siguiente frase: "el resultado anterior se suma al número de la figura". Por ejemplo, para determinar el total de cuadros de la figura 10, fue necesario sumar al total de cuadros de la figura 9 ("el resultado anterior") la cantidad de 10 ("se suma al número de la figura"), en este caso, 45 + 10 = 55.

Número de figura	Número de cubos	Cantidad a sumar
9	45	+10
10	55	

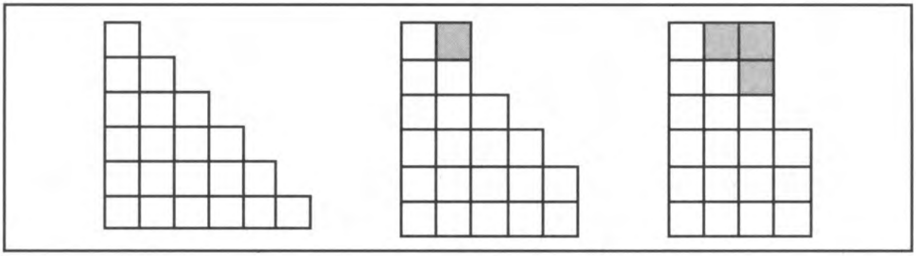
Con este primer método los alumnos completaron la siguiente tabla (las celdas con números en negritas son las que complearon los alumnos).

Número de la figura	Total de cuadros en la figura
7	**28**
8	**36**
11	66
25	325
1 000	

Esta estrategia no fue la más práctica para determinar el total de cuadros de la figura 1 000. Un alumno sugirió: "Para la figura 1 000 hay que multiplicar a la de 10 por 100". Esta propuesta la hizo sabiendo que la figura 10 tiene 55 cuadros, y propuso multiplicar 55 × 100, lo cual daba como resultado 5 500 cuadros para la figura 10. Este resultado no es correcto, por lo cual fue necesario considerar otra estrategia. Una alumna, haciendo alusión a la estrategia hasta el momento utilizada, planteó lo siguiente: "Tenemos que sacar el número de cuadros de la figura 1 000, primero tenemos que saber cuántos cuadros tiene la 998 y para saber la 998 la 997 y así sucesivamente, ¿tenemos que sacar todo? Debe de haber un método". Esa alumna reconocía que para la figura 1 000 esta estrategia no es práctica y preguntó si había un método, lo cual se convirtió en la siguiente tarea de la clase: Hallar un método para determinar el total de cuadros de la figura 1 000.

Respuestas no esperadas

El método encontrado por un alumno para simplificar la manera de determinar el total de cuadros de una figura fue una de las respuestas no esperadas y orientó la sesión de trabajo hacia una forma distinta a lo planeado originalmente. El alumno escribió en el pizarrón en forma vertical y en orden descendente los números del 6 al 1; separó al número 6 de los demás y sumó al 5 con el 1 y al 4 con el 2, quedando el 3 solo (mediante líneas relacionó al 5 con el 1 y al 4 con el 2). En seguida, efectúo las operaciones $6 \times 3 = 18$ y $18 + 3 = 21$, y concluyó que la figura 6 tenía 21 cuadros. En su explicación el alumno dibujó la figura que se muestra a continuación y relacionó las diferentes columnas. Se puede observar que la primera columna (de seis cuadros) quedaba sola, la segunda (de cinco cuadros) se juntaba con la última de un solo cuadro, y la tercera (de cuatro cuadros) con la penúltima de dos, quedando sola la columna de tres cuadros. De esta forma quedaban tres columnas de seis cuadros y una de tres.



Una vez que explicó su método lo usó para la figura 1 000. Entonces escribió la siguiente lista de números asociándolos en parejas.

1 000

999
998
•
•
•
2
1

En esta ocasión, el alumno obvió los números intermedios y sólo anotó los dos primeros y los tres últimos de entre el 1 y el 1 000. Enseguida efectuó las operaciones $1\ 000 \times 500 = 500\ 000$ y $500\ 000 + 500 = 500\ 500$; por lo tanto, la figura 1 000 tenía 500 500 cuadros.

Las distintas consideraciones para determinar el número de cuadros de un número de figura par o impar, usando el segundo método, hicieron que el maestro pidiera a los alumnos escribir una expresión algebraica para determinar el total de cuadros para el caso en que el número de la figura es impar y otra para cuando es par. Esta situación modificó lo planeado al inicio, ya que no se pretendía que los alumnos distinguieran dos casos; sin embargo, esta situación apareció durante el desarrollo de la clase.

La expresión para un número de figura impar escrita por un alumno es

$$((F-1) \div 2+1)\times F, \text{ donde } F \text{ es el número de la figura.}$$

Un ejemplo usando la fórmula con la figura 13 fue el siguiente:

$$13 - 1 = 12, (F - 1),$$
$$12 \div 2 = 6, (F - 1) \div 2,$$
$$6 + 1 = 7, (F - 1) \div 2 + 1,$$
$$7 \times 13 = 91, ((F - 1) \div 2 + 1) \times F.$$

Por lo tanto, la figura 13 tiene 91 cuadros.

De hecho, esta fórmula también funciona para las figuras de número par; sin embargo, esto ya no fue posible aclararlo porque se agotó el tiempo de la clase.

La expresión escrita para un número de figura par es

$A \div 2 = B$, donde A es el número de la figura y B las veces que se multiplica por A.

$(B + 1) \times A + B$, donde B es el total que se multiplica por el número de la figura A.

Un ejemplo usando la fórmula con la figura 6 fue:

$$6 \div 2 = 3, A \div 2,$$
$$(3 + 1) = 4, B + 1,$$
$$4 \times 6 = 24, (B + 1) \times A,$$
$$24 + 3 = 27, (B + 1) \times A + B.$$

Sin embargo, el resultado obtenido no correspondía al número de cuadros de la figura 6, por lo que el alumno que escribió la fórmula dijo: "le cambio el más por el menos", y entonces corrigió la expresión de la siguiente forma:

$$(B + 1) \times A - B.$$

También corrigió el ejemplo:

$$6 \div 2 = 3,$$
$$3 \times 6 = 18,$$
$$18 + 3 = 21.$$

Por lo tanto, la figura 6 tiene 21 cuadros.

Esta segunda fórmula también determinaba el número de cuadros para una figura de número impar; sin embargo, tampoco fue aclarado.

En la segunda secuencia de figuras los alumnos invirtieron bastante más tiempo de lo previsto en la planeación inicial, lo cual no permitió revisar con detalle las expresiones escritas para determinar el número de cuadros de una figura. Los alumnos escribieron dos expresiones que funcionaban para cualquier número de figura (par e impar).

Dificultades

En la segunda sesión y la última secuencia de figuras geométricas, los alumnos requirieron de mayor tiempo del planeado originalmente para encontrar un método que les permitiera encontrar en forma rápida el número de cuadros de cualquier figura. De hecho, esta situación provocó que la sesión se extendiera más tiempo del previsto.

Es muy probable que los alumnos tardaran en encontrar un nuevo método porque centraban su atención en tablas como la siguiente.

Número de la figura	Total de cuadros
1	1
2	3
3	6
4	10

Los alumnos exploraron con las cantidades registradas en las tablas para encontrar posibles relaciones; sin embargo, como es posible observar, las expresiones algebraicas escritas al final de la sesión de trabajo no representaban relaciones sencillas; son de segundo grado. Es probable que si los alumnos se hubieran auxiliado de figuras geométricas, o el maestro hubiera alentado su uso, pudieran haber encontrado un método que les abreviara el trabajo, como fue el caso del alumno que encontró un método basado en una interpretación geométrica.

Planeación de las actividades con los maestros: Actividades, tiempo, descripción y recursos

Cápsula de video (8 min). Proyección de un video que presenta un juego matemático.

Trabajo en equipo (5 min). Los maestros resuelven actividades relacionadas con el video proyectado (hoja de trabajo).

Exposición del trabajo realizado (5 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Segundo juego matemático (5 min). Los maestros discuten un segundo juego matemático (pizarrón y marcadores).

Primera secuencia de figuras geométricas (1 min). Los maestros observan una secuencia de figuras geométricas formada con cubos de madera (cubos de madera).

Trabajo en equipo (5 min). Los maestros responden una serie de preguntas relacionadas con las figuras (hoja de trabajo y cubos de madera).

Exposición del trabajo realizado (3 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón).

Segunda secuencia de figuras geométricas (1 min). Los maestros observan una segunda secuencia de figuras geométricas construida con cubos de madera (cubos de madera).

Trabajo en equipo (12 min). Los maestros responden una serie de preguntas relacionadas con las figuras (hoja de trabajo y cubos de madera).

Exposición del trabajo realizado (5 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón).

Descripción de las actividades

Cápsula de video

Los maestros observan un video relacionado con un mago que hace el siguiente juego matemático:

> Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10, a ese número súmale 10 y anota el resultado. Ahora réstale a 10 el número que pensaste y anota el resultado. Suma los dos resultados que anotaste. ¿Qué resultado final obtuviste?

Trabajo en equipo

Los maestros resuelven las siguientes actividades:

1. Descubran la razón por la que el mago puede adivinar el resultado.
2. Escriban una fórmula que represente el juego del mago.
3. Modifiquen la fórmula para que el resultado final sea distinto de 20.
4. Escriban una fórmula que considere diferentes resultados al final.

Exposición del trabajo realizado

Los maestros comentan las respuestas dadas a las actividades propuestas.

Segundo juego matemático

Los maestros discuten un juego matemático en el que es posible adivinar un número pensado, el cual es el siguiente:

> Piensen un número.

Sumen 3 al número que pensaron.

Eleven al cuadrado el resultado anterior.

Resten 9 al resultado anterior.

Dividan el resultado anterior por el número que pensaron.

Digan cuál fue su último resultado.

¡El número que pensaron es…!

Primera secuencia de figuras geométricas

Los maestros observan la secuencia de figuras construidas con cubos de madera que se muestra en la figura 1.

Trabajo en equipo

Los maestros resuelven las siguientes actividades relacionadas con la secuencia de figuras geométricas:

1. Reproduzcan las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. ¿Cuántos cubos necesitaron para reproducir cada figura?
3. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
4. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?
5. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
6. Completen la siguiente tabla.

Número de la figura	**Total de cuadros en la figura**
7	
9	
	225
29	
53	

7. Expliquen cómo encontraron el número de la figura cuando ésta tiene en total 225 cuadros.

8. Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.

Exposición del trabajo realizado

Los maestros exponen las respuestas dadas a las actividades del inciso anterior.

Segunda secuencia de figuras geométricas

Los maestros observan la secuencia de figuras construidas con cubos de madera, mostrada en la figura 2.

Trabajo en equipo

El coordinador del taller muestra a los maestros la figura 2 con cubos de madera y les pide lo siguiente:

Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura geométrica de la secuencia de figuras geométricas mostrada.

Exposición del trabajo realizado

Los maestros exponen al grupo las estrategias implementadas para determinar el total de cuadros de cualquier figura de la secuencia mostrada en la figura 2.

Lo que hicieron los maestros

Respuestas esperadas

Para la primera actividad, el juego del mago, los maestros justificaron por qué el mago podía anticipar el resultado, escribieron una expresión algebraica para representar el juego matemático y modificaron la expresión para que el resultado fuera cualquier cantidad. Para el segundo juego matemático, los maestros justificaron por qué era posible adivinar el número pensado, considerando pasos como las siguientes:

Piensen un número:	n
Sumen 3 al número que pensaron:	$n + 3$
Eleven al cuadrado el resultado anterior	$(n + 3)^2$
Resten 9 al resultado anterior:	$(n + 3)^2 - 9$
Dividan el resultado anterior por el número que pensaron:	$\frac{(n + 3)^2 - 9}{n}$
Digan cuál fue su último resultado:	$n + 6$
¡El número que pensaron es…!	$n + 6 - 6$

En la primera secuencia de figuras geométricas, los maestros encontraron la relación entre el número de la figura y el número de cuadros: el total de cuadros de una figura es igual al cuadrado del número de la figura.

También vincularon las figuras geométricas con la relación encontrada, mediante la manipulación de los cubos de madera, como se ilustra a continuación.

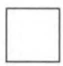
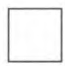


Figura 1



$1^2 = 1$

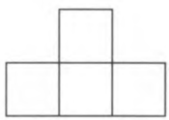
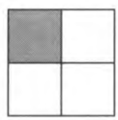


Figura 2



$2^2 = 4$

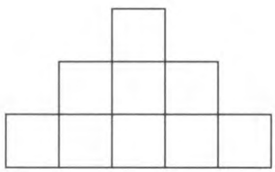
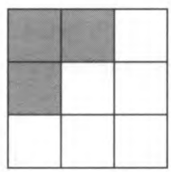


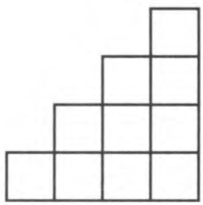
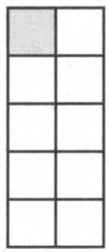
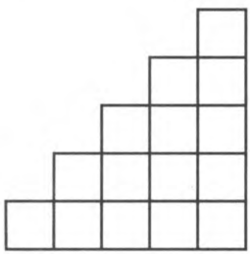
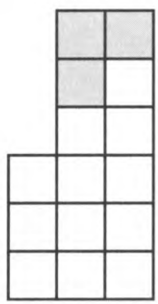
Figura 3



$3^2 = 9$

En cuanto a la segunda secuencia de figuras geométricas, un maestro mencionó de inicio que la relación entre el número de la figura y el total de cuadros era "la fórmula de Gauss": $\frac{n(n+1)}{2}$, n siendo el número de la figura.

Con base en lo anterior se pidió a los maestros manipular los cubos de madera para encontrar el vínculo entre la expresión conocida y las figuras geométricas. Hacia el final de la sesión se mostró una forma de relacionar las figuras geométricas con "la fórmula de Gauss", la cual se ilustra a continuación.

Figura	**Reconfiguración**	**Cálculos**
		$n = 4$ $\frac{n}{2} = 2$ $(n + 1) = 5$ $\frac{n}{2}(n + 1) = 2 \times 5 = 10$ La figura 4 tiene 10 cuadros
		$n = 5$ $\frac{n}{2} = 2.5$ $(n + 1) = 6$ $\frac{n}{2}(n+1) = 2.5 \times 6 = 15$ La figura 5 tiene 15 cuadros

Respuestas no esperadas

Las distintas respuestas de los maestros durante el taller pueden considerarse como dentro de lo esperado durante la planeación. Tal vez lo que no se esperaba es que les tomara un poco más del tiempo de lo que se tenía planeado, lo cual se puede justificar con la explicación que se da en el siguiente apartado.

Dificultades

Una dificultad que se observó en el trabajo con los maestros fue cuando debían relacionar la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ con las construcciones geométricas correspondientes. Aun cuando un maestro conocía con anterioridad esta expresión, le resultó difícil relacionarla con las representaciones geométricas. Esta dificultad parece surgir a causa del poco uso, por parte de los maestros, de actividades que promuevan el reconocimiento de generalizaciones y la escritura de su representación algebraica a partir de representaciones geométricas. Lo mismo se observó en el trabajo con los alumnos.

Lo que aprendieron los alumnos

Durante las dos sesiones de trabajo, los alumnos pusieron en juego sus conocimientos para dar respuesta a las diferentes actividades de tipo generativo y de metanivel global, mostrando que fueron capaces de:

- Encontrar estrategias a partir de sus conocimientos aritméticos para resolver las actividades, mediante diversas exploraciones.
- Identificar regularidades y patrones a partir de sus estrategias aritméticas.
- Construir expresiones algebraicas que representan las regularidades y patrones identificados a partir de su trabajo de exploración.

- Dar sentido a expresiones algebraicas de acuerdo con el contexto en el que se estaba trabajando.

Las respuestas que ofrecieron los alumnos a los problemas que se les plantearon nos permiten decir que fueron capaces de identificar diversas generalizaciones y expresarlas a través del lenguaje algebraico; en términos de Kieran (1989), estuvieron realizando actividades propias del pensamiento y simbolismo algebraico.

A lo largo de las sesiones recrearon conceptos y reglas matemáticas que permitieron a los alumnos avanzar en su trabajo; por ejemplo: el uso de literales como variables e incógnitas, el uso de paréntesis para asociar operaciones, la noción de equivalencia y el cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas.

Recomendaciones para la enseñanza

Una constante en las sesiones de trabajo con los alumnos fue que el maestro fungió como moderador de las respuestas de los alumnos y ayudó a reorientar las sesiones en los casos en que fue necesario. Esto propició que el maestro respetara casi todas las respuestas de los alumnos tal como las presentaban, así como el lenguaje que utilizaban al formular sus explicaciones. En esta modalidad de trabajo es muy común que los alumnos utilicen expresiones orales y escritas que "parecieran" no ajustarse a la matemática convencional. Es importante señalar que el maestro, conforme van avanzando las diferentes sesiones de trabajo con los alumnos, busca los momentos adecuados para introducir el uso de un lenguaje y escritura formales, acorde a las matemáticas, con la finalidad de no irrumpir en el tren de razonamiento de sus alumnos, aunque ellos estén expresándose de manera no ortodoxa. Por ejemplo, durante las sesiones de trabajo el maestro utilizó la palabra "fórmula" cuando pedía a los alumnos que simbolizaran algebraicamente sus generalizaciones, y posteriormente fue introduciendo términos más precisos como expresión algebraica, literal y ecuación.

No es raro que surjan una gran variedad de respuestas cuando los alumnos se desenvuelven en un ambiente de aprendizaje cooperativo. Buena parte de las ideas que proponen los alumnos no son las que el maestro está esperando. Sin embargo, le informan de lo que ellos están pensando e incluso de su competencia matemática para el problema que se está resolviendo. Por esto es importante no desestimar ninguna de las respuestas, ya que ellas pueden permitir, entre otras cuestiones, abordar contenidos matemáticos que no estaban previstos en la planeación original, identificar las concepciones erróneas de los alumnos, disponer de una mayor cantidad de posibles soluciones para un mismo problema e incluso argumentos para validar las distintas respuestas.

Por ejemplo, cuando los alumnos construyeron expresiones algebraicas para el juego matemático del mago y construyeron la expresión $(d + x) + (x - d) = x*2$, fue evidente que en ese momento no contaban con el dominio de reglas matemáticas que les permitieran manipular la expresión para reducirla y comprobar algebraicamente su equivalencia con otras expresiones que otros alumnos habían generado, aunque sí lo hicieron mediante la asignación de valores numéricos a las literales. En sesiones posteriores estas expresiones pueden ser un buen pretexto para iniciar a los alumnos en el estudio de las reglas matemáticas que permiten la cancelación de paréntesis y la reducción de términos semejantes.

Una situación en la que un alumno dio una respuesta con una concepción errónea fue cuando propuso: “Para la figura 1000 multiplicar a la de 10 por 100”. En la respuesta del alumno, se puede observar que tenía la idea de que era lineal el incremento de la cantidad de cuadros de una figura a otra; sin embargo, al alumno se le permitió exponer su estrategia y tuvo oportunidad de corregirla al escuchar las soluciones encontradas por sus compañeros. El trabajo en equipo propició la validación de las respuestas de los alumnos; otro factor que desempeñó un papel importante en este aspecto fue que la respuesta a un problema no estaba limitada a una sola forma de resolución. Por ejemplo, cuando un alumno encontró un resultado mediante su método, otro alumno comprobaba dicha respuesta con su propio método, de tal modo que había la posibilidad de contrastar los resultados y, en su caso, reconsiderarlos.

Una última recomendación que nos permitimos proponer es que el maestro oriente a los alumnos para que no sólo se limiten al trabajo simbólico, sino que además acudan a las representaciones geométricas para auxiliarse en la construcción de expresiones algebraicas que expresen sus generalizaciones. De esta forma se espera que tengan la posibilidad de vincular lo geométrico con lo simbólico y le den un sentido más preciso a lo que están realizando.

Ampliación del tema

En las actividades realizadas con los alumnos existen contenidos matemáticos implícitos que, por su nivel de complejidad o porque no eran el propósito central, no fueron abordados. A continuación se presentan algunos de ellos.

Progresiones aritméticas

Veamos la siguiente secuencia de números:

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

En este caso cada número es dos unidades mayor que su precedente. En la secuencia 10, 9, 8, 7, 6, ... cada número es una unidad menor que el precedente. Este tipo de secuencias se llaman *progresiones aritméticas.*

Una progresión aritmética es una secuencia de números en la que cada término es la suma del número precedente y una cantidad constante. Esta cantidad se conoce como la *diferencia común.* O simplemente la *diferencia* de la progresión aritmética. Por ejemplo, en las progresiones 3, 5, 7, 9, 11, ... y 10, 9, 8, 7, 6, ... la diferencia común es 2 y -1 respectivamente.

En ocasiones es útil determinar un término de una progresión aritmética, por ejemplo, en la progresión 3, 5, 7, 9, 11, ... el séptimo término es 15. ¿Pero qué sucede si se desea conocer el milésimo término de la progresión

2, 3, 4, 5, 6,...? Veamos un caso parecido: Si la progresión es 1, 2, 3, 4, 5,..., el primer término es 1, el segundo, 2,..., y el milésimo término 1 000. En esta progresión, cada término es mayor que su precedente por una unidad. Entonces, en el caso original el milésimo término de la progresión es 1 001.

A continuación, propondremos una forma general para determinar el *enésimo* término de una progresión aritmética. El primer término de una progresión es a y su diferencia es d. Encuentre el milésimo y el enésimo términos de la progresión. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{1er. término} &= a \\
\text{2°. término} &= a + d \\
\text{3er. término} &= a + 2d \\
\text{4°. término} &= a + 3d \\
\text{5°. término} &= a + 4d \\
&\dots\ \dots \\
\text{milésimo término} &= a + 999d \\
&\dots \\
\text{enésimo término} &= a + (n-1)\,d \,\dots\dots\dots\, (1)
\end{aligned}$$

Utilizando (1) para el caso de encontrar el milésimo término de la progresión 2, 3, 4, 5, 6, ..., se tiene que $a = 2$, $d = 1$ y $n = 1\ 000$; al sustituir y resolver, tenemos que $a + (n - 1)*d = 2 + (100 - 1)*1 = 2 + 999 = 1\ 001$.

La suma de una progresión aritmética

Una actividad común con las progresiones aritméticas es encontrar la suma de determinada cantidad de sus términos; por ejemplo, calcular la suma $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999$. Un primer paso es determinar cuántos términos hay en la suma. Utilizando (1) podemos encontrar una expresión para el enésimo término de esta progresión, el cual es $1 + (n - 1)*2 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$. Si se desea encontrar la suma hasta el término que ocupa el lugar 999, n debe ser igual a 500, porque $2n - 1 = 999$. Así que la suma contiene 500 términos. Entonces podemos organizar todos los términos en 250 parejas así:

$$(1 + 999) + (3 + 997) + \ldots + (499 + 501).$$

La suma de cada pareja es igual a 1 000. Y como hay 250 parejas, entonces la suma es igual a 250 000.

Considérese ahora lo siguiente: El primer término de una progresión que contiene n términos es a y su último término es b. Determine la suma de sus términos.

Siguiendo un procedimiento similar al del ejemplo anterior, al agrupar los términos en parejas se obtienen $\frac{n}{2}$ parejas, y la suma de cada una de ellas es $a + b$. Así que, la suma de sus términos está dada por la expresión

$$\frac{n(a+b)}{2} \ldots (2).$$

Esta fórmula debe tener ciertas consideraciones, ya que de acuerdo a como fue derivada es correcta si n es par. En el caso de que n sea impar, el término de enmedio queda sin pareja. Sin embargo, la respuesta es válida para ambos casos. Para evitar la distinción entre un número de términos impar y par, se realizará la siguiente consideración. Sea la siguiente suma la que está en cuestión:

$$S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

Rescribiéndola en el orden inverso, tenemos: $S = 11 + 9 + 7 + 5 + 3$.

Ahora, sumando las dos igualdades:

$$\begin{aligned} 2S = &\ 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 + 3 \end{aligned}$$

Cada columna tiene dos números cuya suma es 14:

$$3 + 11 = 5 + 9 = 7 + 7 = 9 + 5 = 11 + 3 = 14.$$

Entonces, $2S = 5 \times 14 = 70$ y $S = \frac{5 \cdot 14}{2} = 35$.

Para el caso general, se tienen n columnas cuya suma es igual a la suma del primero y el último términos, esto es, $a + b$, por lo tanto, la fórmula queda como en (2):

$$S = \frac{n(a+b)}{2}.$$

Este argumento da validez al uso de (2) para n par e impar y puede ser ilustrado mediante las figuras 1 y 2. La suma $3 + 5 + 7 + 9 + 11$ se ilustra en la figura 1.

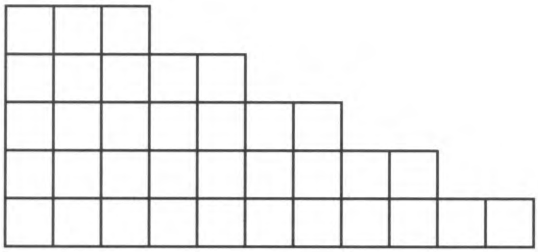


Figura 1

Dos de estas piezas configuradas adecuadamente conforman un rectángulo de 5×14 (véase la figura 2).

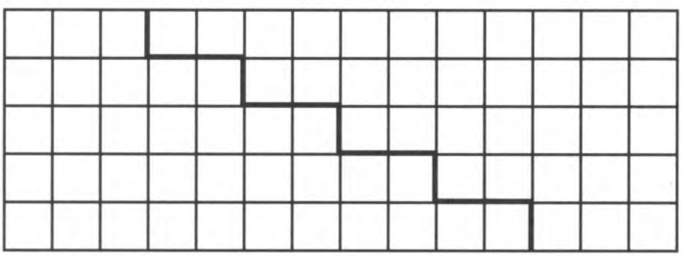


Figura 2

Consideremos ahora la siguiente progresión aritmética:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

¿Cuál es la suma de los primeros n términos? En la figura 3 se puede observar geométricamente que la suma de los primeros n términos es un cuadrado: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$.

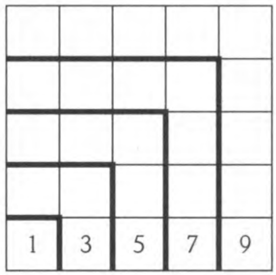


Figura 3

Si se usa la fórmula $S = \frac{n\,(a + b)}{2}$, se sabe que $a = 1$; y como b es un número impar, podemos expresarlo como $2p - 1$, con $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Sustituyendo, la fórmula que se obtiene es

$$S = \frac{n(1 + 2p - 1)}{2} = \frac{n(2p)}{2} = n \times p,$$

pero n y p son iguales. Por ejemplo, si se toman los primeros 4 términos de la progresión ($n = 4$), $b = 7$, y este valor se puede determinar mediante la expresión $2p - 1$, con $p = 4$. Por lo tanto, $n = p$. Entonces, la suma puede expresarse como $S = n^2$, lo cual indica que la suma de los primeros n términos es el cuadrado de un número natural.

Progresiones geométricas

En las siguientes secuencias de números, cada término que sigue es mayor o menor tantas veces que el anterior.

$$5, 20, 80, 320, \ldots$$

$$18, 9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \ldots$$

En la primera secuencia cada término es cuatro veces mayor que el anterior y en la segunda, la mitad. A estas secuencias de números se les llama progresiones geométricas.

Una progresión geométrica es una secuencia de números donde cada término es el producto del número precedente por un número fijo. Esta cantidad fija se conoce como la razón de la progresión geométrica. Por ejemplo, en las secuencias anteriores las razones son 4 y $\frac{1}{2}$.

En una progresión geométrica es posible determinar el valor de un cierto término. Por ejemplo, en la progresión geométrica 5, 20, 80, 320, …, encontremos el vigésimo término.

Una posible forma es continuar la secuencia hasta el 20° término:

$$5, 20, 80, 320, 1\,280, 5\,120, 20\,480, 81\,920, \ldots, 1\,374\,389\,534\,720.$$

Así que el vigésimo término de la progresión es 1 374 389 534 720. Sin embargo, podemos intentar hacer un análisis de la situación y observar lo siguiente.

1er. término	$5 = 5 \cdot 4^0$
2°. término	$20 = 5 \cdot 4^1$
3er. término	$80 = 5 \cdot 4^2$
…	…
20°. término	$1\,374\,389\,534\,720 = 5 \cdot 4^{19}$

Esta situación nos orienta en una generalización que nos ayude a determinar un término de la progresión geométrica. Esto se ilustra a continuación.

1er. término	$a = a \cdot q^0$
2°. término	$a \cdot q = a \cdot q^1$
3er. término	$a \cdot q^2$
4°. término	$a \cdot q^3$
...	...
enésimo término	$a \cdot q^{n-1}$

La expresión $a \cdot q^{n-1}$ nos permite determinar el enésimo término de la progresión geométrica, en donde a es el primer término de la progresión, q es la razón y n es el número del término.

La suma de una progresión geométrica

Si a es el primer término de una progresión geométrica, q es la razón y n es el enésimo término, entonces, para calcular la suma de los primeros n términos se puede considerar lo siguiente.

La suma que se desea obtener es $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$, a la cual denotaremos con S:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

Multiplicando a S por q, obtenemos

$$qS = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Si restamos las expresiones,

$$qS = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n,$$
$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},$$

nos queda

$$qS - S = aq^n - a.$$

Descomponiendo en factores,

$$(q - 1)\, S = a\, (q^n - 1).$$

Entonces,

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Por ejemplo, la suma de los primeros siete términos de la progresión 1, 3, 9, 27… es

$$S = (1)\frac{3^7 - 1}{3 - 1} = \frac{2\,187 - 1}{2} = \frac{2\,186}{2} = 1\,093.$$

¿Qué sucede cuando $q = 1$? La razón de la progresión geométrica es 1 y entonces todos los términos de la progresión son iguales. Por ejemplo, una progresión con esta condición es 7, 7, 7, 7, … .

En este caso la suma es na (n el enésimo término y a el primer término de la progresión).

Método de diferencias

Una de las estrategias de los alumnos para determinar el número de cuadros de una figura consistió en identificar la cantidad que se debía sumar al total de cuadros de la figura anterior, la cual sí conocían. La tabla que se muestra a continuación ilustra esta estrategia.

Figura	Total de cuadros	Cantidad a sumar
1	1	
		+3
2	4	
		+5
3	9	
		+7
4	16	
		+9
5	25	
		+11
6	36	

Sin embargo, la estrategia resultaba poco práctica cuando se trataba de un número de figura muy grande. Así que tuvieron que buscar otras formas de solución.

En esta estrategia los alumnos de manera implícita encontraron la diferencia entre el total de cuadros de una figura y la siguiente. Si hubieran continuado con este proceso habrían observado que al determinar la segunda diferencia el valor que se encontraba era constante, como se muestra a continuación.

Figura	Total de cuadros	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	1		
		4−1=3	
2	4		5−3=2
		9−4=5	
3	9		7−5=2
		16−9=7	
4	16		9−7=2
		25−16=9	
5	25		11−9=2
		36−25=11	
6	36		

En esa propiedad se basa el Método de diferencias, método que se usa para construir una función cuyos valores corresponden a un patrón numérico dado. A continuación se muestra el uso de este método.

Existen reglas que pueden identificarse con cierta facilidad, a partir de tablas de entrada y salida, como las siguientes.

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	?
5	?

x	y
0	1
1	4
2	7
3	10
4	?
5	?

x	y
0	1
1	5
2	9
3	13
4	?
5	?

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	?
5	?

Las reglas que gobiernan esos patrones numéricos son accesibles a muchos alumnos mediante el ensayo y error, lo cual les permite construir con cierta facilidad la fórmula respectiva y completar cada una de las tablas. Sin embargo, también se puede aprovechar esto para que los alumnos efectúen una serie de observaciones con una nueva columna en la tabla, la cual contiene la diferencia entre dos valores consecutivos de *la variable y*. Las siguientes tablas, ya completadas, incluyen la tercera columna (D), en la que está registrada la diferencia entre las y's consecutivas (que es la misma para todas); abajo de cada tabla está escrita la fórmula que representa a cada patrón.

x	y	D
0	1	
1	3	2
2	5	2
3	7	2
4	9	2
5	11	2

$y = 2x + 1$

x	y	D
0	1	
1	4	3
2	7	3
3	10	3
4	13	3
5	16	3

$y = 3x + 1$

x	y	D
0	1	
1	5	4
2	9	4
3	13	4
4	17	4
5	21	4

$y = 4x + 1$

x	y	D
0	3	
1	5	2
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2

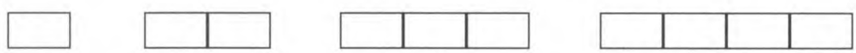
$y = 2x + 3$

Como se observa, las tres funciones son de la forma $y = mx + b$. Se sugiere que los alumnos observen que $b = y$ cuando x es cero (está sombreado en cada una de las tablas). También, que la primera diferencia en todos los casos es constante, la cual coincide con el valor de m. Por ejemplo, en la primera tabla la función es $y = 2x + 1$ y $m = 2$, valor que coincide con los mostrados en la columna D, que también son 2.

Veamos ahora algunas actividades en las que se trata de obtener una función a partir de un patrón numérico.

Primera actividad

¿Cuántos rectángulos hay en total en cada una de las siguientes figuras? Construye una tabla que incluya las diferencias entre las y's consecutivas hasta que esas diferencias sean una constante, y encuentra una fórmula que te permita determinar el total de rectángulos para cada figura.



1 *2* *3* *4*

Por ejemplo, la figura 2 tiene tres rectángulos, los dos que se resaltan a continuación y el que los contiene a ambos.

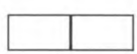


Figura 2

La siguiente tabla incluye los valores que corresponden a las primeras figuras.

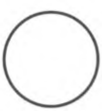
x	y	Primera diferencia	Segunda diferencia
Figura	Total de rectángulos		
0	0		
1	1	1	
2	3	2	1
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1

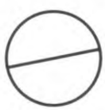
En este caso la primera diferencia de las y's consecutivas no es constante sino hasta la segunda diferencia. Además, no parece tan inmediato encontrar una fórmula. La expresión algebraica del patrón es $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$.

Segunda actividad

¿Cuál es la mayor cantidad de secciones que puedes obtener al hacer x número de cortes en un círculo? Construye una tabla y encuentra una fórmula que te permita determinar el total de partes que puedes obtener con x cortes.

Las primeras cuatro figuras de esta actividad son las siguientes.


0 cortes


1 corte


2 cortes


3 cortes

Una tabla que representa los datos de esta situación es la siguiente.

x	y	D1	D2
Cortes	**Secciones**		
0	1		
1	2	1	
2	4	2	1
3	7	3	1
4	11	4	1
5	16	5	1

En esta actividad, al igual que en la anterior, hasta las segundas diferencias los valores son constantes. La función que modela este patrón numérico es

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1.$$

En estas dos actividades el ensayo y error no permite a los alumnos encontrar fácilmente las fórmulas respectivas. De acuerdo con la información registrada en las tablas de diferencias, podemos determinar el valor del término independiente (constante) en cada función. En el caso de la primera tabla observamos que cuando $x = 0$ también $y = 0$, así que la constante es 0. En cuanto a la segunda, cuando $x = 0$ se tiene que $y = 1$, entonces la constante es 1.

Para encontrar la fórmula completa primero evaluemos $y = ax^2 + bx + c$ para encontrar valores de y a partir de los de x.

x	y	D1	D2
0	c		
1	$a + b + c$	$a + b$	
2	$4a + 2b + c$	$3a + b$	$2a$
3	$9a + 3b + c$	$5a + b$	$2a$
4	$16a + 3b + c$	$7a + b$	$2a$

Analizando esta tabla se tiene lo siguiente:

- Cuando x es cero, $y = c$ (el valor de la constante en $y = ax^2 + bx + c$).
- La primera diferencia ($D1$) es $a + b$, la suma de los coeficientes de x^2 y x.
- La segunda diferencia es $2a$, el doble del valor del coeficiente de x^2.
- El valor de la primera diferencia cuando $x = 1$ es $a + b$.
- El valor de a es $\frac{1}{2}$ de la segunda diferencia; así que se puede encontrar el valor de b sustrayendo a en la primera diferencia $(a + b)$.

Por ejemplo, para la segunda de las actividades podemos derivar la fórmula a partir de estas observaciones.

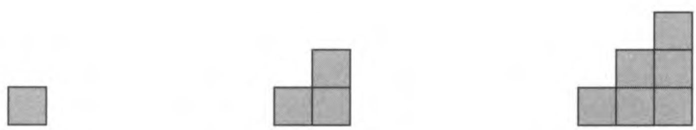
- La constante es el valor de y cuando $x = 0$, por lo tanto, la constante es 1.
- $D2 = 2a$. Ya que $D2 = 1$, entonces el valor de a es $\frac{1}{2}$.
- $D1$ es $a + b$, $D1$ cuando $x = 1$ es 1, y a es $\frac{1}{2}$, entonces el valor de b es, en este caso, también $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la fórmula es

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1,\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2} \text{ y } c = 1.$$

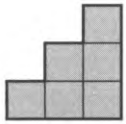
En el caso de la segunda actividad se efectúa algo similar.

A continuación veamos el Método de diferencias en una de las actividades propuesta a los alumnos. Para ello, hay que considerar la siguiente secuencia de figuras.



1 *2* *3*

La pregunta en esta ocasión es: ¿Cuánto mide el perímetro de la enésima figura? Por ejemplo, la figura 3 tiene 12 unidades de perímetro, el cual se resalta a continuación.



Si se construye una tabla y se determina la primera diferencia entre el perímetro de una figura con la siguiente, tenemos que la primera diferencia es constante.

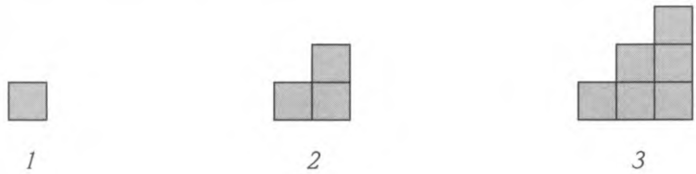
Figura	Perímetro	Primera diferencia
1	4	
		4
2	8	
		4
3	12	
		4
4	16	

De hecho, se trata de una relación sencilla entre el número de la figura y su perímetro, la fórmula es $4n$, siendo n el número de figura. Sin embargo, siguiendo el método de diferencias rescribamos la tabla de la siguiente forma.

Figura n	Perímetro $an + b$	Primera diferencia
1	$a + b$	
		a
2	$2a + b$	
		a
3	$3a + b$	
		a
4	$4a + b$	

Al comparar las expresiones de esta última tabla con la anterior podemos determinar las siguientes equivalencias: $a = 4$ y $a + b = 4$; entonces, $b = 4 - a$; por lo tanto, $b = 0$; y como la fórmula en este caso es de la forma $an + b$, entonces la expresión queda como $4n$.

Ahora se considera el caso en el que la segunda diferencia es constante; para ello se usa la misma secuencia de figuras.



En este caso la pregunta es: ¿Cuántos cuadros tiene la figura n? Por ejemplo, la figura 3 tiene 6 cuadros.

La tabla con las diferencias, para esta secuencia de figuras, es la siguiente.

Figura	**Total de cuadros**	**Primera diferencia**	**Segunda diferencia**
1	1		
		2	
2	3		1
		3	
3	6		1
		4	
4	10		1
		5	
5	15		1
		6	
6	21		

Cuando la segunda diferencia es constante, la fórmula que se obtiene es de la forma $an^2 + bn + c$, una expresión de segundo grado, en donde n es el número de la figura. De acuerdo con esta forma de la expresión rescribimos la tabla anterior, la cual queda como se muestra a continuación.

Figura n	Total de cuadros $an^2 + bn + c$	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	$a + b + c$		
		$3a + b$	
2	$4a + 2b + c$		$2a$
		$5a + b$	
3	$9a + 3b + c$		$2a$
		$7a + b$	
4	$16a + 4b + c$		$2a$
		$9a + b$	
5	$25a + 5b + c$		$2a$
		$11a + b$	
6	$36a + 6b + c$		

Considerando las equivalencias entre las dos tablas, tenemos que

$$a + b + c = 1,\ 3a + b = 2;\ \text{y}\ 2a = 1,$$

y podemos determinar los valores de *a, b* y *c*. Se tiene entonces que

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ \text{y}\ c = 0\,.$$

Entonces la fórmula para determinar el número de cuadros de una figura *n* que es de la forma $an^2 + bn + c$, es

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

BIBLIOGRAFÍA

Cedillo, T. *Toward an Algebra Acquisition Support System: A Study Based on Using Graphic Calculators in the Classroom.* Mathematical Thinking and Learning, 3(4), 221-259. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2001.

Cedillo, T. *La calculadora en el salón de clase: Desarrollo de habilidades algebraicas.* Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 4. México, 1999.

Friel, S., S. Rachlin y D. Doyle. *Navigating Through Algebra in Grades 6-8.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 2001.

Gelfand, I. y A. Shen. *Algebra.* Birkhäuser. EUA, 2002.

Kieran, C. *The Learning and Teaching of School Algebra,* en: *Algebraic Thinking, Grades K-12.* Editado por Moses B. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 1999.

Kieran, C. *The transition from arithmetic to algebra: A model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking.* Matemática Educativa. Aspectos de Investigación Actual (pp. 121-142), Fondo de Cultura Económica, 2003.

Posamentier, A. y J. Stepelman. *Teaching Secondary School Mathematics.* Segunda Edición. Charles E. Merrill Publishing Company, A Bell & Howell Company. Columbus, Ohio, 1986.

Zazkis, R. y P. Liljedahl. *Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation.* Educational Studies in Mathematics, 49, pp. 379-402, Kluwer Academic Publishers, 2002.

Actividades de enseñanza

Hoja de trabajo de la primera clase

Juego matemático del mago

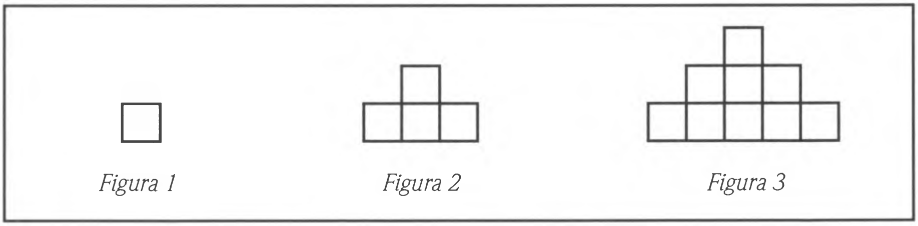
Piensa en un número entero que esté entre 1 y 10, a ese número súmale 10 y anota el resultado. Ahora réstale a 10 el número que pensaste y anota el resultado. Suma los dos resultados que anotaste. ¿Qué resultado final obtuviste?

1. Descubran la razón por la que el mago puede adivinar el resultado.
2. Escriban una fórmula que represente el juego del mago.
3. Modifiquen la fórmula para que el resultado final sea distinto de 20.
4. Escriban una fórmula que considere diferentes resultados al final.

Hojas de trabajo de la segunda clase

Pirámides

Observen las siguientes figuras:



1. Reproduzcan las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. ¿Cuántos cubos necesitaron para reproducir cada figura?

3. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
4. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?
5. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
6. Completen la siguiente tabla.

Número de figura	Total de cuadros en la figura
7	
9	
	225
29	
53	

7. Expliquen cómo encontraron el número de la figura cuando ésta tiene en total 225 cuadros.
8. Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.

Escaleras

Observen las siguientes figuras:

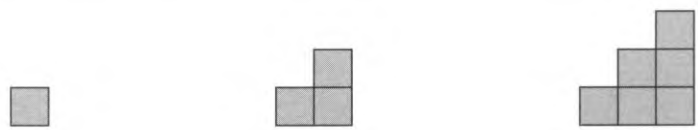


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

1. Reproduzcan las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. ¿Cuántos cubos necesitaron para reproducir cada figura?
3. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
4. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?

5. ¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
6. Completen la siguiente tabla.

Número de la figura	Total de cuadros en la figura
7	
8	
	66
	325
1 000	

7. Expliquen cómo determinaron el número de la figura cuando ésta tiene en total 325 cuadros.
8. Expliquen cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.

El módulo 5: *Juegos y regularidades algebraicas*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Álgebra
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacán 1031. CP. 03100, Col. del Valle.